

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (6 điểm)

Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a) $\sqrt{2x-1} = x^2 - 3x + 1$

b)
$$\begin{cases} \frac{x}{x^2 - y} + \frac{5y}{x + y^2} = 4 \\ 5x + y + \frac{x^2 - 5y^2}{xy} = 5 \end{cases}$$

Bài 2. (3 điểm)

Trong mpOxy, cho tam giác ABC có A(1;2), B(3;-2) và C(2;3).Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua B và cắt AC tại D (khác A) sao cho AB = BD.

Bài 3. (3 điểm)

Cho 2 số thực dương a, b . Chứng minh rằng: $a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

Bài 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $BD = 2CD$; E là trung điểm của AD. Một đường thẳng bất kỳ qua E cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh: $\frac{AB}{AM} + \frac{2AC}{AN} = 6$

b) Tìm vị trí của M trên AB sao cho diện tích tam giác AMN bằng $\frac{1}{3}$ diện tích tam giác ABD.

Bài 5. (2 điểm)

Một cửa hàng có 350 đồ lưu niệm với các mức giá tương ứng là 1 ngàn, 2 ngàn, 3 ngàn, ..., 349 ngàn và 350 ngàn đồng. Bạn Nam có 50 tờ 2 ngàn và 50 tờ 5 ngàn ngoài ra không có tờ tiền nào khác. Bạn ấy muốn mua một món đồ lưu niệm và khẳng định chỉ trả chính xác một số tiền (không thối lại). Có bao nhiêu trong số 350 đồ lưu niệm mà Nam có thể chọn?

Bài 6. (2 điểm)

Trên một đường cao tốc hình tròn, có 3 trạm thu phí cầu đường được đặt tại: một chiếc cầu, một con kênh, một đập thủy điện theo chiều kim đồng hồ. Khi đi qua cầu người đó phải trả 1000 đồng, tiếp đến qua con kênh người đó phải trả 1500 đồng và qua đập thủy điện người đó phải trả 1800 đồng. Người đó xuất phát ở vị trí giữa đập thủy điện và cây cầu, đi theo chiều kim đồng hồ đến khi phải trả phí cầu đường tổng cộng 58400 đồng, hỏi người đó phải trả bao nhiêu ở trạm tiếp theo?

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (6 điểm)

$$a) \sqrt{2x-1} = x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow 2x - 1 + \sqrt{2x-1} + \frac{1}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (1đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = x-1 \\ \sqrt{2x-1} = -x \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \quad (1đ)$$

$$b) \begin{cases} \frac{x}{x^2-y} + \frac{5y}{x+y^2} = 4 \\ 5x+y + \frac{x^2-5y^2}{xy} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-\frac{y}{x}} + \frac{5}{\frac{x}{y}+y} = 4 \\ 5x+y + \frac{x}{y} - \frac{5y}{x} = 5 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } a = x - \frac{y}{x}; b = y + \frac{x}{y}, \text{ hệ trở thành } \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{5}{b} = 4 \\ 5a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ y + \frac{x}{y} = \frac{5}{2} \end{cases} \quad (2đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ x\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{x - \frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ x = 1 \vee x = \pm \frac{3}{2} \end{cases} \quad (1đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 3 \end{cases} \quad (1đ)$$

Bài 2. (3 điểm)

Trong mpOxy, cho tam giác ABC có A(1;2), B(3;-2) và C(2;3).Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua B và cắt AC tại D (khác A) sao cho AB = BD.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AC} = (1;1)$

Đường thẳng AC qua A và nhận $\overrightarrow{AC}$ làm vtcp có phương trình: $x - y + 1 = 0$ (0,75đ)

Phương trình đường thẳng qua B(3;-2) và vuông góc với AC: $x + y - 1 = 0$ (0,75đ)

Tọa độ hình chiếu H của B lên AC là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

Suy ra H(0;1) (0,5đ)

Do AB = BD nên tam giác ABD cân tại B suy ra H là trung điểm của AD.

Suy ra D(-1;0) (0,5đ)

Phương trình đường thẳng (d) qua B và nhận $\overrightarrow{BD} = (-4;2)$ làm vtcp: $x + 2y + 1 = 0$ (0,5đ)

Bài 3. (3 điểm)

Cho 2 số thực dương a, b . Chứng minh rằng: $a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Leftrightarrow (a + b)\sqrt{2} \geq \sqrt{2ab} + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a + b)^2 \geq 2ab + a^2 + b^2 + 2\sqrt{2ab(a^2 + b^2)} \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 2\sqrt{2ab(a^2 + b^2)}$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^4 \geq 8ab(a^2 + b^2) \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^4 \geq 8ab(a + b)^2 - 16a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow [(a + b)^2 - 4ab]^2 \geq 0 \quad (2đ)$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^4 \geq 0 \text{ (Bất đẳng thức luôn đúng)}$$

Bài 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $BD = 2CD$; E là trung điểm của AD . Một đường thẳng bất kỳ qua E cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh: $\frac{AB}{AM} + \frac{2AC}{AN} = 6$

Do M nằm trên cạnh AB nên ta có $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AM} \quad (k > 1)$ (0,25đ)

Do N nằm trên cạnh AC nên ta có $\overrightarrow{AC} = l\overrightarrow{AN} \quad (l > 1)$ (0,25đ)

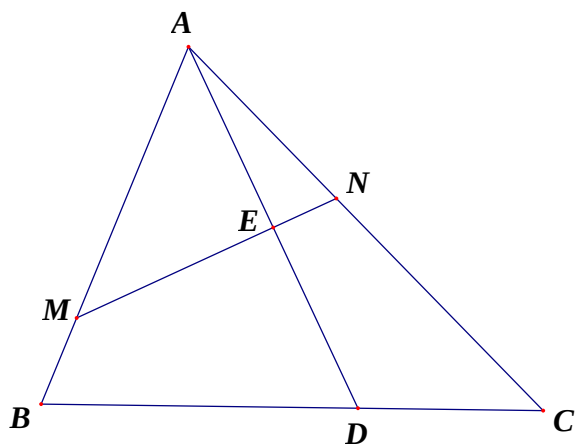
Ta có $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = -2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD}$ (0,5đ)

Suy ra $k\overrightarrow{AM} + 2l\overrightarrow{AN} = 6\overrightarrow{AE} \Rightarrow k\overrightarrow{AE} + k\overrightarrow{EM} + 2l\overrightarrow{AE} + 2l\overrightarrow{EN} = 6\overrightarrow{AE}$
 $\Rightarrow (k + 2l - 6)\overrightarrow{AE} = -k\overrightarrow{EM} - 2l\overrightarrow{EN}$ (0,5đ)

Do 2 đường thẳng AE và MN không cùng phương nên $k + 2l - 6 = 0$ (1) (0,5đ)

Hay $\frac{AB}{AM} + \frac{2AC}{AN} = 6$

b) Tìm vị trí của M trên AB sao cho diện tích tam giác AMN bằng $\frac{1}{3}$ diện tích tam giác ABD .



Ta có $S_{ABD} = \frac{2}{3}S_{ABC} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{2}{9}S_{ABC}$ (0,5đ)

$\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \frac{2}{9} \Rightarrow kl = \frac{9}{2}$ (2) (0,5đ)

Giải hệ (1) và (2) ta được $k = 2l = 3$ (0,5đ)

Suy ra $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$ hay $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (0,5đ)

Bài 5. (2 điểm)

Rõ ràng Nam không thể mua được các đồ lưu niệm giá 1 ngàn, hoặc 3 ngàn. (0,25đ)

Nam cũng không thể mua các món đồ giá 349 ngàn hoặc 347 ngàn (vì nếu mua được 1 trong 2 món đồ này thì Nam cũng mua được 1 trong 2 món đồ 1 ngàn hoặc 3 ngàn).(0,25đ)

Ta sẽ chứng minh rằng Nam sẽ mua được hết các món đồ còn lại.

- Với 50 từ 2 ngàn, Nam mua được các món đồ 2, 4, 6, ..., 100 ngàn. (0,25đ)
- Với 50 từ 2 ngàn và 20 từ 5 ngàn, Nam mua được các món đồ 102, 104, 106, ..., 200 ngàn.
- Với 50 từ 2 ngàn và 40 từ 5 ngàn, Nam mua được các món đồ 202, 204, 206, ..., 300 ngàn.
- Với 50 từ 2 ngàn và 50 từ 5 ngàn, Nam mua được các món đồ 252, 254, 256, ..., 350 ngàn. (0,5đ)
- Với 50 từ 2 ngàn và 1 từ 5 ngàn, Nam mua được các món đồ 5, 7, 9, ..., 105 ngàn.
- Với 50 từ 2 ngàn và 21 từ 5 ngàn, Nam mua được các món đồ 107, 109, ..., 205 ngàn.
- Với 50 từ 2 ngàn và 41 từ 5 ngàn, Nam mua được các món đồ 207, 209, ..., 305 ngàn.
- Với 50 từ 2 ngàn và 49 từ 5 ngàn, Nam mua được các món đồ 245, 247, ..., 345 ngàn. (0,5đ)

Vậy Nam có thể chọn mua đúng giá 346 đồ lưu niệm. (0,25đ)

Bài 6. (2 điểm)

Nhận thấy rằng sau khi đi một vòng (về vị trí cũ) thì người đó sẽ đóng phí là $1000 + 1500 + 1800 = 4300$ đồng (0,5đ)

$58400 = 13.4300 + 2500$ (0,5đ)

Như vậy sau khi đi 13 vòng, qua cầu và con kênh người đó đóng phí 58400 đồng. (0,5đ)

Do đó người đó đóng phí ở trạm tiếp theo (đập thủy điện) là 1800 đồng. (0,5đ)